基于质心参照系的物理理论 II. 粒子动力学原理

梁忠诚[1)†]

1) (南京邮电大学 电子与光学工程学院, 南京 210023)

本文拓展了基于质心参照系的弹性粒子流场理论，构建了新粒子动力学的理论基础。本文提出的作用原理申明：完备的流场粒子相互作用包含梯度力、旋度力和散度力（$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_G+\boldsymbol{F}_C+\boldsymbol{F}_D$）。粒子的运动遵循修正的能量定理和角动量定理，以及新发现的旋量定理。动力平衡状态（定态）的能量、旋量和角动量守恒，并服从广义的量子化跃变法则。在核作用场中，粒子运动遵循广义的牛顿定律（$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，状态方程），定态方程（$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$）的解是椭圆轨道（本征态）。多粒子系统的定态是花瓣形轨道，轨道能谱（能量本征值）由旋量的平方确定。建立了粒子轨道数学模型，解释了电子壳层结构和氢原子光谱，阐明了原子核自旋与电子轨道手征性的关系。理论的完备性和自洽性表明，流场力是粒子相互作用的统一形式，测量原理是融合相对论和量子论基础的第一性原则，粒子动力学定理是宏观和微观世界普适的物理规律。

关键词: 粒子动力学，弹性粒子，质心参照系，流场作用力，测量原理，动力学定理，轨道量子化

PACS: 95.10.Jk, 45.50.-j, 45.50.Dd, 03.65.Ta

1 引 言

描述物体的运动必须选择适合的参照系，采用不同参照系往往导致不同的理论框架。众所周知，托勒密的天文学采用地心参照系，哥白尼的天文学采用日心参照系，目前流行的牛顿力学框架是惯性参照系[1]。为了解决经典电动力学和引力理论的参照系问题，爱因斯坦发明了空时(spacetime)参照系，从而创建了相对论[2]。但是，作为现代物理学支柱之一的量子论却没有统一的参照系，以致对量子力学基础的诠释争议不断，持续至今。

量子力学基础争议的核心涉及粒子本性的诠释[3]。量子是波动抑或粒子，经典力学认为这是两个相互反对的命题，不能同时为真。量子力学假定量子是具有波粒二象性的实体，于是量子参照系的问题被忽视

† 通信作者. E-mail: zcliang@njupt.edu.cn

和掩盖。现代量子论虽然取得巨大成功，但是关于粒子本性和运动参照系的基础性问题始终没有很好解决。近年，作者基于弹性粒子（实粒子）模型创立了一个物理理论[4−9]；最近，作者又将这个理论移置于质心参照系(barycenter frame of reference)框架[10]。基于质心参照系的粒子场理论给出了作用力的统一形式[6,9,10]，揭示了物体相互作用的普遍规律。在此基础上，本文进一步阐明质心参照系理论的测量原理，提出粒子动力学的作用原理，详解动力学平衡方程，揭示粒子运动的基本规律。

经典力学、电动力学、相对论力学和量子力学是四个不同的理论框架。从第一性原理(the first principle thinking)出发，基于质心参照系的弹性粒子理论将几个理论融为一体，形成了一个独特的理论范式和话语体系。为了方便和改善交流，读者需要了解一些新颖的概念以及更新的术语，以缓解不可通约性造成的观念冲突[11]。

2 基本原理

2.1 测量原理

测量原理表述如下：在质心参照系中，粒子流场的质心具有不确定性，物理量的测量精度存在极限，其极限精度受到物理关系的约束。

物理测量的极限精度称为标度，用标度表示的物理量称为真实量(actual quantity)。真实量$\boldsymbol{q}$ 定义为数字因子 $\tilde{\boldsymbol{q}}$(digit)和标度因子 q_s(scale)的直积

$$\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}} \cdot q_s; \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{Q}, \quad q_s \in \mathrm{C_U}\mathbb{Q}). \tag{1}$$

数字$\tilde{\boldsymbol{q}}$是物理量的量值，标度q_s是物理量的标识和度规。为了区别，数字因子用颚化符∼标注，标度因子用下标s标注。对于真实量$\{x, y, z\}$，如果有物理关系$z = f(x, y)$，那么必然存在如下约束条件

$$z = f(x, y) = \tilde{z} \cdot z_s \iff \tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \ \wedge \ z_s = f_s. \tag{2}$$

其中$\tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y})$称为关系不变性(relation invariance)，$z_s = f_s$称为标度协变性(scale covariance)。关系不变性和标度协变性确定了真实量的独特运算规则[9,10]。

真实量的标度可以理解为物理量的单位。例如，r_s是空间长度的单位，t_s是时间的单位。经典物理学采用单位表示物理量，称为单位制；质心参照系理论采用标度表示物理量，称为标度制。两者的区别在于：单位不能连续变化，标度可以连续变化。标度协变的数学思想是将测量单位视为连续变量，在高维的

数学空间研究低维的物理世界。国际单位制有七个独立的基本单位，受到物理关系的约束，标度制只有三个独立的标度。独立的标度称为标度基，其它标度可由基本标度导出，称为导出标度。

标度是物理量不可缺少的因子，不带标度的数字没有物理意义。标度不仅代表测量极限和物理度规，还蕴含统一的科学思想。例如，(r_s, t_s)可以理解为空间量子和时间量子，(r_s^{-1}, t_s^{-1})可以诠释为空间曲率和时间曲率。测量原理融合了量子论和相对论的核心思想，统一了物理学的理论基础。测量原理曾被称为测量相对性原理[12]和客观性原理[4−9]。

2.2 流场基础

(一) 卷积场

根据弹性粒子流场理论[9,10]，粒子空间存在质量密度场$\rho(\boldsymbol{r}, t)$，动量密度场$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$，以及速度场$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)/\rho(\boldsymbol{r}, t)$。由此可以计算质量卷积$\Phi(\boldsymbol{r}, t)$和动量卷积$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{-1}{\phi} \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{r} \mathrm{d}V'; \quad \Phi_s = c^2, \quad \phi_s = \frac{m_s}{c^2 r_s}. \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \alpha \iiint_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t)}{r} \mathrm{d}V', \quad A_s = c, \quad \alpha_s = \frac{r_s}{m_s}. \tag{3b}$$

其中$r = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$，$c$是用于时间同步的信号速度。$\phi = 4\pi\phi_s$和$\alpha = \alpha_s/(4\pi)$分别是质量卷积系数和动量卷积系数，满足系统约束$\phi\alpha = \phi_s\alpha_s = c^{-2}$。粒子场理论约定采用光速作为速度的标度，即$v_s = c = 299792458\,\mathrm{m/s}$。卷积场又称为势场，质量卷积是标量势，动量卷积是矢量势。

(二) 作用场

卷积场的空间和时间变化率称为作用场。作用场包括梯度$\boldsymbol{G}$ (gradient)、旋度$\boldsymbol{C}$ (curl) 和散度D (divergence)，其定义为

$$\boldsymbol{G} := -\nabla\Phi, \quad \boldsymbol{C} := \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad D := \nabla \cdot \boldsymbol{A}. \tag{4}$$

梯度$\boldsymbol{G}$代表引力加速度，其标度是$G_s = v_s f_s$。这里的$f_s = t_s^{-1}$是频率的标度。散度D和旋度$\boldsymbol{C}$的标度都是f_s，它们分别代表场元的振动频率和转动频率。质心系中频率是一个比时间更为实用的概念。

(三) 力场与加速场

密度为$\rho(\boldsymbol{r}, t)$的场元受到一个力场$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}, t)$的作用

$$\boldsymbol{F}' = \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}'_G + \boldsymbol{F}'_C + \boldsymbol{F}'_D; \quad a_s = v_s f_s, \quad F'_s = \rho_s a_s. \tag{5}$$

式中$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$和$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t)$分别是场元的速度和加速度，$D\boldsymbol{v}/Dt$是速度的运动导数（物质导数, 随体导数）。

$\boldsymbol{F}'_G, \boldsymbol{F}'_C, \boldsymbol{F}'_D$分别称为梯度力密度、旋度力密度和散度力密度，它们具有如下形式

$$\boldsymbol{F}'_G = \rho \boldsymbol{a}_G = \rho \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{F}'_C = \rho \boldsymbol{a}_C = \rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{F}'_D = \rho \boldsymbol{a}_D = \rho D \boldsymbol{v}. \tag{6}$$

$\boldsymbol{a}_G, \boldsymbol{a}_C, \boldsymbol{a}_D$分别是梯度力、旋度力和散度力产生的加速度。在流场理论中，上述物理量都是欧拉型变量。

2.3 作用原理

对于一个质量为m的物体，若将其位矢表示为时间的函数$\boldsymbol{r}(t)$，则速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \quad v_s = r_s f_s; \qquad \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \quad a_s = v_s f_s. \tag{7}$$

用矢量$m\boldsymbol{r}$表示的物体是牛顿质点，简称粒子。质点模型略去了真实粒子的体积和弹性。

根据公式(5)，粒子在作用场中承受的合力$\boldsymbol{F}(t)$包含三项

$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_D, \quad F_s = m_s a_s; \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}_G, \quad \boldsymbol{F}_C = m\boldsymbol{a}_C, \quad \boldsymbol{F}_D = m\boldsymbol{a}_D; \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{G}, \qquad \boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{a}_D = D\boldsymbol{v}. \tag{8c}$$

动力学作用原理表述如下：粒子的运动受流场驱动，完备的流场作用包括梯度力$\boldsymbol{F}_G$、旋度力$\boldsymbol{F}_C$和散度力$\boldsymbol{F}_D$，它们分别使粒子产生梯度加速度$\boldsymbol{a}_G$、旋度加速度$\boldsymbol{a}_C$和散度加速度$\boldsymbol{a}_D$。

2.4 吸引与排斥

散度D是标量，旋度$\boldsymbol{C}$是矢量。以散度作为频率的标度，即令

$$\tilde{D} = 1, \qquad D = f_s = 1/t_s, \tag{9}$$

可将旋度的数字表示为

$$\boldsymbol{\omega} := \tilde{\boldsymbol{C}} = \frac{C_1\,\boldsymbol{i} + C_2\,\boldsymbol{j} + C_3\,\boldsymbol{k}}{D} = \omega_1\,\boldsymbol{i} + \omega_2\,\boldsymbol{j} + \omega_3\,\boldsymbol{k}, \quad \omega_i = \tilde{C}_i = \frac{C_i}{D} \ \ (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

切记$\boldsymbol{\omega}$是一个数字化旋度（略去了数字标记），其标度是$f_s = D$。粒子动力学习惯用频率的标度f_s代替时间的标度t_s。

粒子的合加速度可以表示为如下形式

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_G + \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{11}$$

其中$\boldsymbol{G}$是吸引加速度，$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}$是排斥加速度。$\boldsymbol{R}$称为排斥矩阵，其形式为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} D & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & D & C_1 \\ C_2 & -C_1 & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix}D. \tag{12}$$

只要$D\neq 0$，那么$\det\boldsymbol{R}\neq 0$。散度$D=f_s$称为频率量子，存在频率量子是产生排斥作用的必要条件。

方程(11)等价于$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，称为动力学状态方程。由状态方程可见，速度$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$时排斥加速度为零，因此运动本身是产生排斥的原因。加速度来自于速度的仿射变换，表现为粒子的非线性运动，这是质心系的基本特征。又因为$\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{v})\neq\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$，这称为加速度的手征性，手征性是质心系区别于惯性系的重要特征。当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$时，吸引力等于排斥力，粒子处于动力平衡状态。动力平衡态又称定态(steady state)。

2.5 模式与状态

一个物体（实粒子）有三种运动模式：平动、转动和振动。平动模是物体质心在空间的平移，转动模是物体内粒子相对于质心的定点转动，振动模是物体内粒子相对于质心的弹性振荡。三维空间中每种运动模式有三个自由度，三种模式共有九个运动自由度。

物体质心（质点）的平动模称为轨道运动。定态轨道可以分解为一个自由度的转动态和两个自由度的振动态。转动态是质点在轨道平面内的圆周运动，振动态包括质点相对于轨道平面的径向振荡和轴向振荡。

2.6 系统与约束

运动粒子$m\boldsymbol{r}$和作用场$\{\boldsymbol{G},\boldsymbol{C},D\}$构成一个动力学系统，系统基本方程是与$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$等价的状态方程。根据约束条件求解$\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{G},\boldsymbol{C},D\}$是粒子动力学基本问题。动力学系统的约束包括数学约束和物理约束。数学约束包含标度协变性和有限性条件，物理约束包含能量定理、角动量定理、旋量定理和三种量的守恒定理。

粒子受力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$的系统是动力平衡系统，平衡系统的状态方程是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}. \tag{13}$$

平衡态方程称为定态方程(steady equation)，定态方程的解是本征态(eigen state)。平衡系统要求作用场是稳恒场，所以$\{\boldsymbol{G},\boldsymbol{C},D\}$与时间无关。平衡系统的能量、旋量和角动量守恒，又称保守系统。平衡系统中的粒子具有稳定的轨道和周期，如月球环绕地球、地球环绕太阳的运动。

2.7 能量定理

定义粒子的运动能E (motion energy)

$$E := \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_s = m_s v_s^2. \tag{14}$$

粒子运动能不同于质点动能(kinetic energy)。运动能包含场的贡献，不为粒子单独所有。

定义运动能的变化率为运动功率P (motion power)

$$P := \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = P_G + P_C + P_D, \quad P_s = E_s f_s. \tag{15a}$$

$$P_G = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{G}, \tag{15b}$$

$$P_C = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_C = m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{C}), \tag{15c}$$

$$P_D = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}_D = m\boldsymbol{v}\cdot(D\boldsymbol{v}) = mDv^2. \tag{15d}$$

功率等于速度与力的标量积，这称为能量定理。P_G, P_C, P_D分别是梯度功率、旋度功率和散度功率。对于$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ 的定态，有

$$P = \frac{dE}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = 0, \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 = constant. \tag{16}$$

上式表明定态系统的总功率为零，运动能量是常数，这称为能量守恒定理。该定理与质点系的能量守恒定律相当，但是运动能包含粒子的轨道转动能和振动能。质心系理论用轨道振动能取代了惯性系的势能概念。能量守恒定理同时表明：本征态粒子的能量具有稳定值，仅当外界扰动达到E_s时，粒子能量才可能发生跃变。这是广义的能量量子化规则。

2.8 角动量定理

定义粒子的角动量$\boldsymbol{M}$ (angular momentum)

$$\boldsymbol{M} := m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{M}_l := m\boldsymbol{r}\times(-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{M}; \qquad M_s = m_s r_s v_s. \tag{17}$$

规定$\boldsymbol{M}$为右手角动量，$\boldsymbol{M}_l$为左手角动量。反对称性$\boldsymbol{M}_l = -\boldsymbol{M}$称为角动量的手征性(chirality)。手征性是质心系理论对惯性系理论的重要补充。除非特别说明，本文分析均以右手角动量为例。

定义角动量的变化率为力矩$\boldsymbol{T}$ (force torque)

$$\boldsymbol{T} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}_G + \boldsymbol{T}_C + \boldsymbol{T}_D, \quad T_s = E_s. \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{T}_G = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{G}, \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{T}_C = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_C = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{C}), \tag{18c}$$

$$\boldsymbol{T}_D = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_D = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})D. \tag{18d}$$

力矩等于位矢与力的矢量积，这称为角动量定理。$\boldsymbol{T}_G, \boldsymbol{T}_C, \boldsymbol{T}_D$分别是梯度力矩、旋度力矩和散度力矩。对于$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$的平衡态，有

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{M} = constant\ vector. \tag{19}$$

上式表明定态系统的总力矩为零，角动量是常矢量，这称为角动量守恒定理。该定理同时表明：本征态粒子的角动量具有稳定值，仅当外界扰动达到M_s时，粒子的角动量才可能发生跃变。这是广义的角动量量子化规则。

2.9 旋量定理

定义粒子的旋量$\boldsymbol{L}$（curlity）

$$\boldsymbol{L} := m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{C}, \qquad L_s = m_s r_s f_s = m_s v_s. \tag{20}$$

质心系的旋量与惯性系的动量($m\boldsymbol{v}$)具有相同的标度，但是它们的物理意义不同。

理论的自洽性要求旋量的变化率等于作用力，因此

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{C} + m\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_R, \qquad F_s = L_s f_s = m_s a_s; \tag{21a}$$

$$\boldsymbol{F}_C = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{C} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{F}_R = m\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_D. \tag{21b}$$

作用力$\boldsymbol{F}$包含旋度力$\boldsymbol{F}_C$和径向力$\boldsymbol{F}_R$，径向力又包含梯度力$\boldsymbol{F}_G$和散度力$\boldsymbol{F}_D$，这称为旋量定理。对于$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$的平衡态，有

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{L} = constant\ vector. \tag{22}$$

上式表明定态系统的总旋量是常矢量，这称为旋量守恒定理。该定理同时表明：本征态粒子的旋量具有稳定值，仅当外界扰动达到L_s时，粒子的旋量才可能发生跃变。这称为旋量量子化规则。

理论的自洽性还要求旋量与能量、角动量满足如下封闭性条件

$$E = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}) = \frac{L^2}{2m}, \qquad E_3 = \frac{1}{2m\lambda^2}(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M}) = \frac{M^2}{2m\lambda^2}. \tag{23}$$

E是系统的总能量，E_3是与角动量相关的能量，称为角动能。旋量是质心参照系理论特有的物理量，旋量定理、旋量守恒定理和旋量量子化是质心参照系特有的规律。旋量与能量、角动量的关系使粒子动力学形成封闭、自洽和完备的理论体系。

3 稳恒场

3.1 作用场

考虑一个半径r_0、密度ρ_0、质量m_0的均匀刚球，它绕过球心O的固定轴匀速转动，角频率为ω_0。这个刚球称为作用核(acting kernel)，作用核的定轴转动称为核自旋(kernel spin)。作用核的质量产生梯度场$\boldsymbol{G}'$，核自旋产生旋度场$\boldsymbol{C}'$，粒子$m\boldsymbol{r}'$与作用核的相对运动产生散度场D'。以核自旋方向为参考，粒子的轨道运动具有手征性。粒子动力学不考虑粒子$m\boldsymbol{r}'$本身的自旋运动。

建立核坐标系$[OX_1'X_2'X_3']$，坐标轴的单位矢为$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')$。原点$O$在核心，$X_3'$与核自旋轴重合。坐标面$X_3'=0$称为核赤道面，用$\pi_e$表示。以$OX_3'$ 为极轴的球坐标参数是(r',θ',φ')，参数增加方向的单位矢是$(\boldsymbol{e}_r',\boldsymbol{e}_\theta',\boldsymbol{e}_\varphi')$。基矢$(\boldsymbol{e}_r',\boldsymbol{e}_\theta',\boldsymbol{e}_\varphi')$与$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')$之间的关系是

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r' &= \sin\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{i}' + \sin\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{j}' + \cos\theta'\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{e}_\theta' &= \cos\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{i}' + \cos\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{j}' - \sin\theta'\boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{e}_\varphi' &= -\sin\varphi'\boldsymbol{i}' + \cos\varphi'\boldsymbol{j}' \end{cases}$$

运动粒子与作用核形成一个动力学系统，系统的质心(barycenter)始终偏离核心O。核坐标系是观测参照系，核心是观测点。从观测参照系转移到质心参照系只需标度变换，不需要坐标变换，即将核坐标系中的物理量表示为真实量，并按照真实量规则进行运算。

3.2 梯度场

根据粒子流场理论[9,10]可以算出作用核外的质量卷积

$$\Phi'(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\phi}\iiint_V \frac{\rho_0(\boldsymbol{r}^*)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}^*|}dV^* = -\frac{m_0}{\phi r'} \qquad (r'>r_0) \tag{24}$$

其中r^*,V^*是积分变量。质量卷积与引力势（静电势）等价。由此可计算作用核外的梯度

$$\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{r}') = -G'(r')\boldsymbol{e}_r', \quad G'(r') = \frac{m_0}{\phi r'^2}, \quad G_s = cf_s. \tag{25}$$

其中卷积系数$\phi=1/g$，g是万有引力常数。梯度的实质是引力加速度，可用笛卡尔基表示为

$$\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{r}') = -G'(r')(\sin\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{i}' + \sin\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{j}' + \cos\theta'\boldsymbol{k}') \tag{26}$$

3.3 散度场

流场理论给出的散度为

$$D'(\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi'}{\partial t}+D'_0(t),\quad D_s=f_s. \tag{27}$$

因为平衡场的质量卷积与时间无关，即$(\partial\Phi'/\partial t)=0$，故平衡场的散度$D'$ 是系统常数。散度代表粒子与作用核相对振动的频率。

3.4 旋度场

稳恒场的动量卷积为

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}')=\alpha\iiint_V\frac{\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{r}^*)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}^*|}dV^*, \tag{28}$$

动量卷积与静磁势等价。引用定轴转动均匀带电球体的磁势计算结果[13]，我们给出作用核外的动量卷积

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}')=\frac{\alpha_s m_0\omega_0}{20\pi}\frac{r_0^2}{r'^2}\sin\theta'\boldsymbol{e}'_\varphi\qquad(r'>r_0). \tag{29}$$

由此算出核外旋度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{r}')&=B'(r')(2\cos\theta'\boldsymbol{e}'_r+\sin\theta'\boldsymbol{e}'_\theta),\\ B'(r')&=\frac{\alpha_s m_0\omega_0}{20\pi}\frac{r_0^2}{r'^3},\quad B_s=f_s=D'.\end{aligned} \tag{30}$$

用笛卡尔基表示的数字化旋度为

$$\boldsymbol{\omega}'=\tilde{\boldsymbol{C}}'=\tilde{B}'(2\cos\theta'\boldsymbol{e}'_r+\sin\theta'\boldsymbol{e}'_\theta)=\omega'_1\,\boldsymbol{i}'+\omega'_2\,\boldsymbol{j}'+\omega'_3\,\boldsymbol{k}'; \tag{31}$$

$$\omega'_1=3\tilde{B}'\sin\theta'\cos\theta'\cos\varphi',\quad\omega'_2=3\tilde{B}'\sin\theta'\cos\theta'\sin\varphi',\quad\omega'_3=\tilde{B}'(3\cos^2\theta'-1).$$

4 定态轨道

4.1 轨道坐标

作用核产生的梯度是中心对称场，旋度是轴对称场。已知粒子在核作用场中有稳定的椭圆轨道，O是椭圆的一个焦点。如图1所示，设轨道面为π_o，π_o的法向单位矢是$\boldsymbol{k}$。轨道面π_o与核赤道面π_e的交线为l，两面之间夹角β称为轨道倾角。建立轨道坐标系$[OX_1X_2X_3]$，轴向单位矢是$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$，轨道面与坐标面$X_3=0$重合。此外，让$X_2$轴与交线$l$重合，$X_1$轴与椭圆的长轴重合。以$X_3$为极轴的球坐标参数是$(r,\theta,\varphi)$。

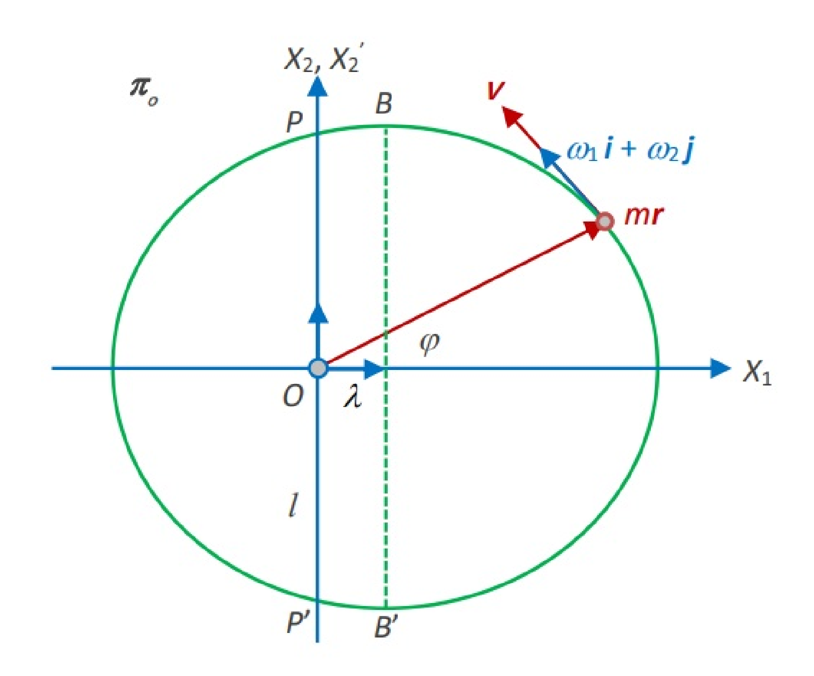


图1　轨道坐标系　Fig. 1 System of orbital coordinates.

轨道坐标系的原点是核心，属于观测参照系。平衡轨道的基本约束是有限性和周期性

$$0 < r < \infty, \qquad r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi k), \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{32}$$

轨道坐标系中的向量$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{G}\}$共线，$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{G}\}$共面。因质心系的位矢具有不确定性，故取消$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{G}\}$的共线条件，保留$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{G}\}$ 的共面条件

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{0}, \qquad (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{33}$$

轨道坐标系中向量$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{C})$可以表示为

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{G} = G_1\boldsymbol{i} + G_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}. \tag{34}$$

由此可以计算加速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{G} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{C} + D\boldsymbol{v} \\ &= (C_3v_2 + Dv_1 - G_1)\boldsymbol{i} + (Dv_2 - C_3v_1 - G_2)\boldsymbol{j} + (C_2v_1 - C_1v_2)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{35}$$

4.2 定态解

令$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，得到动力平衡方程（定态方程）

$$\begin{cases} C_3v_2+Dv_1=G_1 \\ Dv_2-C_3v_1=G_2 \\ C_2v_1-C_1v_2=0 \end{cases} \tag{36}$$

这是关于速度的代数方程组。由方程(36)的第一和第三式解得一组速度

$$v_1=\frac{G_1C_1}{DC_1+C_2C_3},\quad v_2=\frac{G_1C_2}{DC_1+C_2C_3}.$$

由方程(36)的第二和第三式解得另一组速度

$$v_1=\frac{G_2C_1}{DC_2-C_1C_3},\quad v_2=\frac{G_2C_2}{DC_2-C_1C_3}.$$

综合上两式给出速度的定态解

$$v_1=rC_1=r\omega_1D,\qquad v_2=rC_2=r\omega_2D. \tag{37}$$

其中r是定态位矢的长度

$$r=\frac{G_1}{DC_1+C_2C_3}=\frac{G_2}{DC_2-C_1C_3}. \tag{38}$$

有限性条件要求排除$r\to\infty$的发散点

$$DC_2-C_1C_3=(\omega_2-\omega_1\omega_3)D^2\neq 0\quad\Longrightarrow\quad D\neq 0,\quad \omega_2-\omega_1\omega_3\neq 0. \tag{39}$$

由(38)的两个等式解出D和r

$$D=\frac{(G_1C_1+G_2C_2)C_3}{G_1C_2-G_2C_1},\qquad r=\frac{G_1C_2-G_2C_1}{(C_1^2+C_2^2)C_3}. \tag{40}$$

可见$r=0$既是空间奇异点也是$D\to\infty$的发散点，必须排除。$r\neq 0$的条件是

$$G_1C_2-G_2C_1=(G_1\omega_2-G_2\omega_1)D\neq 0\quad\Longrightarrow\quad G_1\omega_2-G_2\omega_1\neq 0. \tag{41}$$

4.3 标度系

真实量的标度代表物理量的精度极限，它们是非零的有限值。采用标度制可以直接消除奇异性，保证定态解的有限性。真实量有三个独立的标度，称为标度基。不同的标度基形成标度系，用$[s_1s_2s_3]$表示。粒子动力学主要采用$[mrv]$标度系，其标度基是

$$m_s=m,\quad r_s=\lambda,\quad v_s=c. \tag{42}$$

流场理论要求采用光速c作为速度的标度，长度标度λ根据情况选择。根据协变性可以导出其它标度

$$\begin{aligned} f_s = v_s/r_s = c/\lambda = D, \quad G_s = v_s f_s = cD, \\ E_s = m_s v_s^2 = mc^2, \quad L_s = m_s v_s = mc, \quad M_s = m_s r_s v_s = m\lambda c. \end{aligned} \tag{43}$$

导出标度是根据标度基变化的，只有测量意义，没有物理意义。例如，$c = \lambda D$是光速与波长、频率的关系，但是散度D并不代表光源的振动频率。再如，$E_s = mc^2$是能量单位，并非能量与质量相互转化。真实量代表质心系物理量，利用真实量的运算规则可以方便物理解析，同时避免冗繁的数值计算。

4.4 速度与梯度

运用真实量规则可对定态速度(37)进一步解析如下

$$v_i = r\omega_i D \;=\; (\tilde{r}\omega_i)\cdot(\lambda D) = \tilde{v}_i \cdot c, \qquad \tilde{v}_i = \tilde{r}\omega_i \qquad (i = 1, 2). \tag{44a}$$

$$\tilde{v} \;=\; \pm\sqrt{\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2} = \tilde{r}\Omega, \quad \Omega = \pm\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \tag{44b}$$

式中Ω称为转动角频率。以核自旋方向为参考，规定$\{v > 0,\, \Omega > 0\}$为右手态，$\{v < 0,\, \Omega < 0\}$为左手态。

通过定态方程组(36)的前两式计算梯度

$$G_1 = Dv_1 + C_3 v_2 = \tilde{r}\omega_1 \cdot (cD) + \tilde{r}\omega_2\omega_3 \cdot (cD) = \tilde{r}(\omega_1 + \omega_2\omega_3)\cdot G_s,$$

$$G_2 = Dv_2 - C_3 v_1 = \tilde{r}\omega_2 \cdot (cD) - \tilde{r}\omega_1\omega_3 \cdot (cD) = \tilde{r}(\omega_2 - \omega_1\omega_3)\cdot G_s.$$

所以

$$\tilde{G}_1 = \tilde{r}(\omega_1 + \omega_2\omega_3), \qquad \tilde{G}_2 \;= \tilde{r}(\omega_2 - \omega_1\omega_3), \tag{45a}$$

$$\tilde{G} \;= \sqrt{\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2} = \tilde{r}\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(1 + \omega_3^2)} = \tilde{r}|\Omega|\sqrt{1 + \omega_3^2}. \tag{45b}$$

因为$\tilde{G}_1\omega_2 - \tilde{G}_2\omega_1 = \tilde{r}\Omega^2\omega_3 \neq 0$，可见定态解确实满足有限性条件(39)和(41)。

4.5 能量与功率

计算粒子的运动能

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \cdot (mc^2) = \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \cdot E_s, \qquad \tilde{E} = \frac{1}{2}\tilde{v}^2 = \frac{1}{2}(\tilde{r}\Omega)^2. \tag{46}$$

定态系统的能量守恒，E是不变量，能量的吸收和释放遵循量子化规则。

略去推导过程，功率的计算结果如下

$$
\begin{aligned}
P_G &= m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{G} = -(\tilde{r}\Omega)^2\cdot P_s,\\
P_D &= m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}D) = (\tilde{r}\Omega)^2\cdot P_s,\\
P_C &= m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{C}) \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

定态系统总功率为零得到验证。$P_C=0$表明旋度能不耗散，$P_G=-P_D$表明梯度能与散度能相互补偿，能量守恒。

4.6 角动量与力矩

计算粒子的角动量

$$
\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = m(x_1v_2-x_2v_1)\boldsymbol{k} = M_3\boldsymbol{k}. \tag{48a}
$$

$$
M_1 = 0,\quad M_2=0,\quad M_3=M=(\tilde{x}_1\omega_2-\tilde{x}_2\omega_1)\cdot M_s. \tag{48b}
$$

粒子本征态的角动量为常矢量，所以轨道平面不会发生空间进动。

略去推导过程，力矩的计算结果是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_G &= m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{G} = \tilde{r}[-(\tilde{x}_1\omega_2-\tilde{x}_2\omega_1)+\omega_3(\tilde{x}_1\omega_1+\tilde{x}_2\omega_2)]\boldsymbol{k}\cdot E_s,\\
\boldsymbol{T}_D &= m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}D) = \tilde{r}(\tilde{x}_1\omega_2-\tilde{x}_2\omega_1)\boldsymbol{k}\cdot E_s,\\
\boldsymbol{T}_C &= m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{C}) = -\tilde{r}\omega_3(\tilde{x}_1\omega_1+\tilde{x}_2\omega_2)\boldsymbol{k}\cdot E_s
\end{aligned}
\tag{49}
$$

由此验证定态系统的总力矩为零。

4.7 轨道几何

标记椭圆短轴的顶点为$B(B')$，椭圆与X_2轴的交点为$P(P')$。椭圆的几何参数包括：半长轴a、半短轴b、半焦距d和半通径$p=b^2/a$。利用角动量守恒定理可以确定椭圆参数。

在$B(B')$点，粒子的位矢是$\boldsymbol{r}_B=(-d,\pm b)$，速度是$\boldsymbol{v}_B=(\mp v_{1B},0)$，角动量为

$$
M = -mbv_{1B} = -(\tilde{b}\tilde{v}_{1B})\cdot(m_sr_sv_s),\qquad \tilde{M}=-\tilde{b}\tilde{v}_{1B}. \tag{50}
$$

在$P(P')$点，粒子的位矢是$\boldsymbol{r}_P=(0,\pm p)$，速度是$\boldsymbol{v}_P=(\mp v_{1P},v_{2P})$，角动量为

$$
M = -mpv_{1P} = -(\tilde{p}\tilde{v}_{1P})\cdot(m_sr_sv_s),\qquad \tilde{M}=-\tilde{p}\tilde{v}_{1P}. \tag{51}
$$

引入椭圆角γ描述椭圆特征

$$
\tan\gamma := \frac{\tilde{v}_{1B}}{\tilde{v}_{1P}} = \frac{p}{b} = \frac{b}{a} \tag{52}
$$

用椭圆角γ表示的半长轴a和半焦距d是

$$
\begin{aligned}
a &= b\cot\gamma = (\tilde{b}\,\cot\gamma)\cdot r_s, && (53a)\\
d &= \sqrt{a^2-b^2} = b\sqrt{\cot^2\gamma - 1} = \tilde{d}\cdot r_s; && (53b)\\
\tilde{d} &= \tilde{b}\sqrt{\cot^2\gamma-1}. && (53c)
\end{aligned}
$$

用半焦距作为长度的标度，即令

$$
\tilde{d} = 1, \qquad r_s = d = \lambda. \tag{54}
$$

这时，椭圆的形状由γ完全确定。

$$
\begin{aligned}
\tilde{b} &= \frac{1}{\sqrt{\cot^2\gamma-1}} = \frac{\tan\gamma}{\sqrt{1-\tan^2\gamma}} && (55a)\\
\tilde{p} &= \frac{\tan\gamma}{\sqrt{\cot^2\gamma-1}} = \frac{\tan^2\gamma}{\sqrt{1-\tan^2\gamma}} && (55b)\\
\tilde{a} &= \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{p}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2\gamma}} && (55c)\\
e &= \frac{d}{a} = \frac{1}{\tilde{a}} = \sqrt{1-\tan^2\gamma}. && (55d)
\end{aligned}
$$

三维空间中$r_s=\lambda$代表一个单位球，它是系统质心不确定的范围，是长度测量精度的极限。理论上，系统的质量（包括运动粒子和作用核）都集中在这个单位球里。这个单位球内属于不可测空间，可称之为“黑洞”。

目前为止，我们证明了椭圆轨道是动力平衡方程的特解，或者说，椭圆轨道是定态方程的本征解。本征态可用数字化旋度$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$表示。

4.8 本征参数

数字化旋度在轨道坐标系中的一般形式为

$$
\boldsymbol{\omega} = \omega_1\,\boldsymbol{i} + \omega_2\,\boldsymbol{j} + \omega_3\,\boldsymbol{k} = \omega(r)(\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}) \tag{56}
$$

其中$\omega(r)$是r的函数，(θ,φ)分别是旋度矢量的极角和方位角。我们需要用轨道不变量替代$\omega(r)$和(θ,φ)。

首先通过坐标变换用(β,γ)表示(θ,φ)。将核坐标系$[OX_1'X_2'X_3']$ 绕X_2'轴逆时针旋转β角，使X_3'与X_3重合，赤道面π_e与轨道面π_o 重合，坐标系变为$[OX_1^*X_2'X_3]$。然后绕X_3轴逆时针旋转γ角，使X_1^*与X_1重合，

X_2'与X_2重合。两次旋转后基矢从$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')$ 变到$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$，变换关系为

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{57}$$

旋度从$[OX_1'X_2'X_3']$到$[OX_1X_2X_3]$的变换为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\\ \omega_3'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(\omega_1'\cos\beta+\omega_3'\sin\beta)\cos\gamma-\omega_2'\sin\gamma\\ (\omega_1'\cos\beta+\omega_3'\sin\beta)\sin\gamma+\omega_2'\cos\gamma\\ -\omega_1'\sin\beta+\omega_3'\cos\beta\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{58}$$

在作用核的赤道面上$\theta'=\pi/2$，根据(31)式有$\boldsymbol{\omega}'=(0,0,-\tilde{B}')$。将$\boldsymbol{\omega}'$代入上式，得到用$(\beta,\gamma)$表示的旋度

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(r)(\sin\beta\cos\gamma\,\boldsymbol{i}+\sin\beta\sin\gamma\,\boldsymbol{j}+\cos\beta\,\boldsymbol{k}),\quad \omega(r)=-\tilde{B}(r). \tag{59}$$

因为粒子的转动角频率Ω是轨道不变量

$$\Omega=\pm\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=\omega(r)\sin\beta, \tag{60}$$

旋度最终可用不变量表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\Omega(\cos\gamma\,\boldsymbol{i}+\sin\gamma\,\boldsymbol{j}+\cot\beta\,\boldsymbol{k}). \tag{61}$$

上式是以数字化旋度表示的本征解，其中(Ω,β,γ)分别是轨道频率、轨道倾角和椭圆角，称为轨道本征参数。

粒子轨道的速度、旋度、梯度和能量按照下述公式计算

$$\tilde{v}=\tilde{r}\Omega,\qquad \Omega=\pm\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}, \tag{62a}$$

$$\omega=\pm\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^3}=\Omega\sqrt{1+\cot^2\beta} \tag{62b}$$

$$\tilde{G}=\tilde{r}|\Omega|\sqrt{1+\omega_3^2}=\tilde{r}|\Omega|\sqrt{1+(\Omega\cot\beta)^2} \tag{62c}$$

$$\tilde{E}=\frac{1}{2}\tilde{v}^2=\frac{1}{2}(\tilde{r}\Omega)^2 \tag{62d}$$

4.9 月球轨道

月球在地球作用场中作周期运动，月球-地球构成一个动力平衡系统。表1所列为月球轨道数据（引自维基百科）。

表1　月球轨道特征

Table 1.　Characteristics of lunar orbit

月球质量 m	$7.346 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
月球轨道周期 τ	$27.321661\,\mathrm{d} = 2354146\,\mathrm{s}$
轨道半长轴 a	$384399\,\mathrm{km}$
轨道偏心率 e	0.0549
轨道倾角 β	$23.44° + 5.145° = 0.498902\,\mathrm{rad}$

月球轨道系统的标度基是

$$m_s = m = 7.346 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}, \quad v_s = c = 299792458\,\mathrm{m/s}, \quad r_s = \lambda = ae = 2.11035 \times 10^7\,\mathrm{m}. \tag{63}$$

导出标度有

$$f_s = D = c/\lambda = 14.2058\,\mathrm{Hz}, \quad G_s = cD = 4.2588 \times 10^9\,\mathrm{m/s^2}, \quad E_s = mc^2 = 6.60226 \times 10^{39}\,\mathrm{J}. \tag{64}$$

月球轨道的角频率和转动半径是

$$\varOmega = \frac{2\pi}{\tau D} = 1.8788 \times 10^{-7}, \qquad \tilde{r} = \tilde{a} = \frac{1}{e} = \frac{1}{0.0549} = 18.2149. \tag{65}$$

轨道的其它参数计算如下

$$\begin{aligned} &\omega = \varOmega\sqrt{1+\cot^2\beta} = 3.92675 \times 10^{-7}; \\ &\tilde{G} = \tilde{r}\varOmega\sqrt{1+(\varOmega\cot\beta)^2} = 3.42222 \times 10^{-6}, \quad G = \tilde{G}\cdot G_s = 14574.5\,\mathrm{m/s^2}; \\ &\tilde{E} = \frac{1}{2}(\tilde{r}\varOmega)^2 = 5.8558 \times 10^{-12}, \qquad E = \tilde{E}\cdot E_s = 3.86615 \times 10^{28}\,\mathrm{J}. \end{aligned} \tag{66}$$

月球轨道是量子化的。如果外界干扰的能量达到E_s，月球轨道将发生不连续的跃变。该结论同样支持地球轨道可能会发生灾难性跃变的预言[14]。

5 多粒子系统

5.1 轨道能谱

根据公式(22)计算粒子的旋量

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{C} = [\tilde{x}_2\omega_3\boldsymbol{i} - \tilde{x}_1\omega_3\boldsymbol{j} + (\tilde{x}_1\omega_2 - \tilde{x}_2\omega_1)\boldsymbol{k}] \cdot (mc) = (n_1\boldsymbol{i} - n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}) \cdot L_s;$$
$$\tilde{L}_1 = n_1 = \tilde{x}_2\omega_3, \quad \tilde{L}_2 = -n_2 = -\tilde{x}_1\omega_3, \quad \tilde{L}_3 = n_3 = \tilde{x}_1\omega_2 - \tilde{x}_2\omega_1. \tag{67}$$

旋量守恒要求(n_1, n_2, n_3)是不变量，且n_1, n_2同为正整数。旋量的长度是

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} = \sqrt{(\tilde{r}\omega_3)^2 + n_3^2} \cdot L_s. \tag{68}$$

根据完备性条件(23)，可得轨道能量公式

$$E = \frac{L^2}{2m} = \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \cdot E_s = E_1 + E_2 + E_3, \tag{69a}$$
$$E_3 = \frac{M^2}{2m\lambda^2} = \frac{1}{2}\tilde{M}^2 \cdot E_s = \frac{1}{2}n_3^2 \cdot E_s. \tag{69b}$$

上式称为轨道能谱。根据下述模型，E_1, E_2, E_3分别称为轨道的转动能、振动能和角动能。

5.2 轨道模型

多个粒子的相互作用导致轨道形变。定态平面轨道可以视为圆周转动和径向振动的合成，用参数方程表示为

$$r(\tau) = a + \lambda \sin(n_2\tau), \qquad n_2 = 1, 2, 3, \cdots \tag{70}$$

其中$\tau = tD = \tilde{t}$是数字化时间，$n_2 = f/D = \tilde{f}$是粒子转动一周振动的次数。方程右端第一项代表圆周转动，a是转动半径。第二项代表径向振动，λ是振幅。圆周转动与径向振动的合成是花瓣形轨道(petal orbit)，椭圆是$n_2 = 1$的花瓣轨道特例[14,15]。

花瓣轨道方程的数字形式为

$$\tilde{r}(\tau) = n_1 + \sin(n_2\tau), \qquad n_1 = \tilde{a} = 2, 3, 4, \cdots; \quad n_2 = 1, 2, 3, \cdots. \tag{71}$$

n_1称为半径数，代表转动半径；n_2称为花瓣数，代表径向振动次数。因为转动半径大于振动幅度，所以半径数$n_1 > 2$。花瓣轨道的转动能E_1和振动能E_2分别是

$$E_1 = \frac{1}{2}m(aD)^2 = \frac{1}{2}\tilde{a}^2 \cdot (m\lambda^2 D^2) = \frac{1}{2}n_1^2 \cdot E_s, \tag{72a}$$
$$E_2 = \frac{1}{2}m(n_2\lambda D)^2 = \frac{1}{2}n_2^2 \cdot (m\lambda^2 D^2) = \frac{1}{2}n_2^2 \cdot E_s. \tag{72b}$$

花瓣轨道的转动能大于振动能($E_1 > E_2$)，所以半径数大于花瓣数($n_1 > n_2$)。图2是$n_1 = 6, n_2 = 1, 2, 3, 4$的轨道示例。图中虚线是$n_1 = 6, n_2 = 0$的圆，实线是相对于该圆的花瓣轨道。

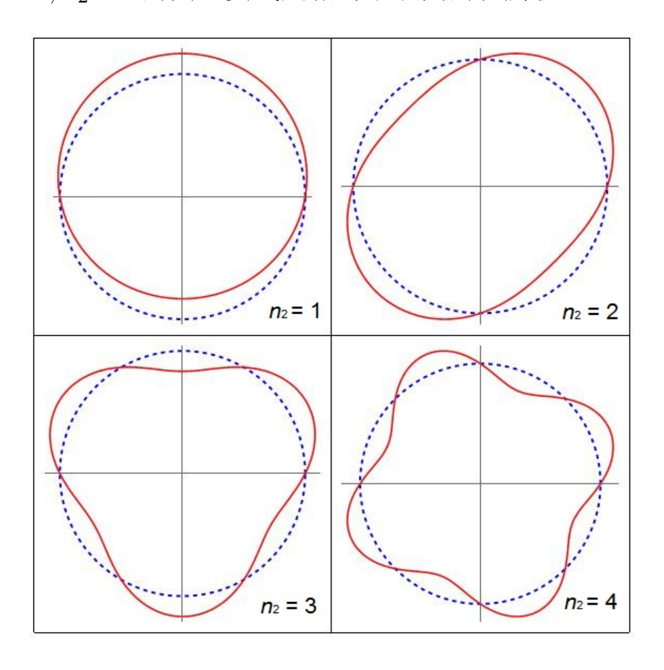


图2　平面轨道示例。$n_1 = 6, n_2 = 1, 2, 3, 4$.　Fig. 2　Example of planar orbit. $n_1 = 6, n_2 = 1, 2, 3, 4$.

5.3 空间轨道

多粒子系统的轨道不局限于平面。每个粒子的运动轨迹不仅有轨道面内的径向振动，还有垂直于轨道面的轴向振动。粒子的空间轨道可用参数方程表示为

$$\begin{cases} X(\tau) = [n_1 + \sin(n_2\tau)]\cos(\tau + \pi n_3/n_1) \\ Y(\tau) = [n_1 + \sin(n_2\tau)]\sin(\tau + \pi n_3/n_1) \\ Z(\tau) = n_3 \sin(\tau + \pi n_2/n_1) \end{cases} \tag{73}$$

(n_1, n_2, n_3)统称为轨道量子数，分别代表轨道的转动半径、径向振动次数和轴向振动幅度。当轨道量子数取整数时，空间轨道满足周期性和唯一性条件。周期性条件要求转动一个周期（2π 弧度）轨道必须闭合，这是粒子本征态的基本特征。唯一性条件要求每组量子数(n_1, n_2, n_3)只对应一条轨道，这是泡利不相容原理的实质。

因为$n_3 = \tilde{M}$，所以轴向振幅代表角动量。$n_3 > 0$表示右手角动量，$n_3 < 0$表示左手角动量。因为轴向振动频率等于转动频率，所以轴向振幅n_3又代表轨道倾角β。

$$\tan\beta = \frac{n_3}{n_1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right). \tag{74}$$

我们将n_3称为倾角数。$|n_3|$越小能量越低，故低能轨道集中在作用核的赤道面附近。用符号$O(n_1, n_2, n_3)$表示粒子空间轨道，图3是$O(6, 3, n_3)$, $n_3 = \pm1, \pm2, \pm3$ 的轨道示例。

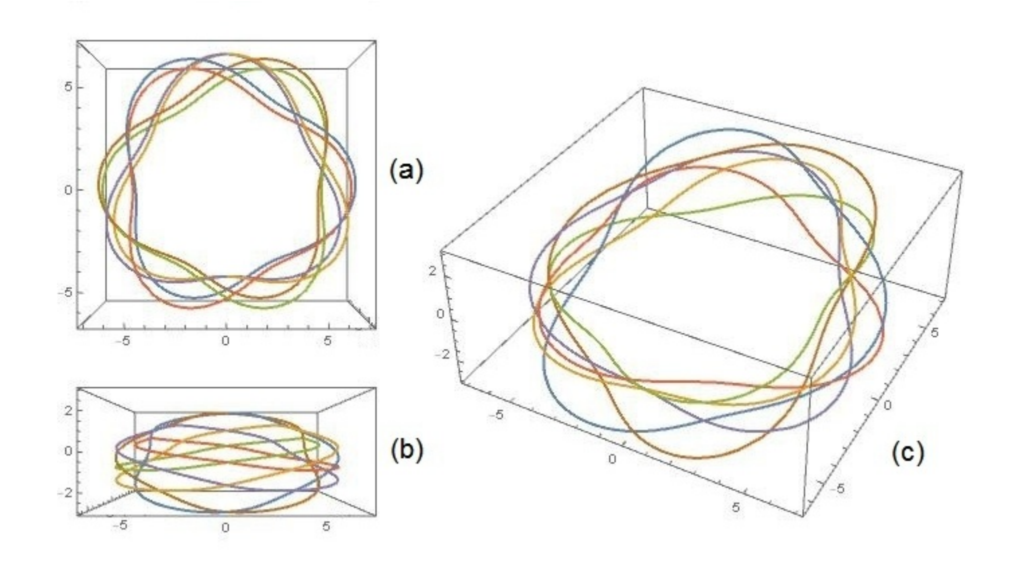


图3 空间轨道示例。 (a) 俯视图，(b) 侧视图，(c) 全景图。 $n_1 = 6, n_2 = 3, n_3 = \pm1, \pm2, \pm3.$

Fig. 3 Example of spatial orbit. (a) Top view, (b) Side view, (c) panoramic view. $n_1 = 6, n_2 = 3, n_3 = \pm1, \pm2, \pm3.$

5.4 电子壳层

原子是电子绕核转动的多粒子系统。将半径数n_1相同的电子轨道空间称为一个壳层，则每个壳层允许的花瓣数为$n_2 \le n_1 - 1$，允许的倾角数为$|n_3| \le n_2$。轨道量子数允许的取值范围是

$$n_1 = 2, 3, 4, \cdots; \quad n_2 = 1, 2, 3, \cdots, (n_1 - 1); \quad n_3 = \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm n_2. \tag{75}$$

每一壳层最多的轨道数目为

$$N(n_1) = 2\sum_{n_2=0}^{n_1-1}(2n_2 - 1) = 2(n_1 - 1)^2. \tag{76}$$

上式中$(2n_2 - 1)$个轨道是交换n_2和n_3位置的结果，倍数2是考虑了右旋和左旋轨道的结果。

在量子力学中，$n = n_1 - 1, l = n_2 - 1, m = \pm l$，$n, l, m$分别是电子的主量子数、角量子数和磁量子数。$n = 1, 2, 3, 4, \cdots$的壳层用K, L, M, N, $\cdots$表示。同一壳层又分为n个亚壳层，分别取值$l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$，并用$s, p, d, f, \cdots$表示。第$l$亚壳层的磁量子数$m$有$2l + 1$个取值，所以第$n$壳层拥有能级数$n^2$。假设电子具有自旋量子数$m_s = \pm1/2$，量子力学将$n$壳层能够容纳的电子数扩展为$2n^2$。这个结果与公式(76)的结论是一致的。不同的是，量子力学中的电子态不仅需要四个量子数描述，还包含

了$l=0$的圆形轨道和$m=0$的核赤道面上的轨道。

在原子结构理论中，高壳层的电子能量小于低壳层电子能量的现象称为能级交错。例如，电子$4s$轨道和$3d$轨道的能级是倒置的。半经典理论将能级交错现象解释为轨道贯穿效应(penetration effect)。根据轨道能量公式(69)，亚壳层内的电子能量由n_2和n_3共同确定。例如，$3d$轨道的最高能级是$\tilde{E}(4,3,3)=34/2$，次高能级是$\tilde{E}(4,3,2)=29/2$，而$4s$轨道的实际能级是$\tilde{E}(5,1,1)=27/2$，可见$3d$轨道和$4s$轨道出现能级倒置。但是，$2p$轨道的最高能级是$\tilde{E}(3,2,2)=17/2$，$3s$轨道的能级是$\tilde{E}(4,1,1)=18/2$，所以$2p$和$3s$ 轨道能级没有交错。

5.5 氢原子光谱

原子光谱是研究原子结构的主要依据。氢原子是由一个质子和一个电子组成的动力学系统，具有最简单的光谱结构。研究光谱可采用$[mrM]$标度系，其标度基是

$$m_s = m_e, \qquad r_s = a, \qquad M_s = h. \tag{77}$$

其中$m_e = 9.10938371\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$是电子质量，$h = 6.62607015\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot Hz^{-1}}$是普朗克常数，$a$是电子轨道半径。导出标度有

$$v_s = \frac{M_s}{m_s r_s} = \frac{h}{m_e a}, \quad f_s = \frac{v_s}{r_s} = \frac{h}{m_e a^2} = D, \quad E_s = m_s v_s^2 = \frac{h^2}{m_e a^2} = hD. \tag{78}$$

可见能量标度E_s随着轨道半径a或散度D变化。令$a_k = ka_1$，则

$$E_s(k) = hD_k = \frac{h^2}{m_e a_k^2} = \frac{h^2}{m_e (ka_1)^2} = \frac{E_s(1)}{k^2}, \quad E_s(1) = \frac{h^2}{m_e a_1^2}, \quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{79}$$

其中a_1是最小轨道半径，$E_s(1)$是与最小半径a_1对应的最低轨道能量。

电子的第n轨道与第m轨道$(n>m)$的能量差是

$$\Delta E_{nm} = E_s(m) - E_s(n) = h(D_m - D_n) = hD_{nm}. \tag{80}$$

若ΔE_{nm}以光波的形式释放，则相应的散度差D_{nm}就是发射光的频率

$$D_{nm} = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{E_s(1)}{h}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (1 \le m < n). \tag{81}$$

在氢原子光谱理论中，D_{n1}是莱曼系、D_{n2}是巴尔末系、D_{n3}是帕邢系，等等。

与氢原子的光谱项比较可知里德伯常数是

$$R = \frac{E_s(1)}{hc} = \frac{h}{m_e c a_1^2}. \tag{82}$$

已知$R = 10973731.6\ \mathrm{m}^{-1}$，由此计算出氢原子中电子的最小轨道半径

$$a_1 = \sqrt{\frac{h}{m_e c R}} = 4.40214479 \times 10^{-10}\mathrm{m}. \tag{83}$$

根据这一结果，可以将普朗克常数h解释为电子最小轨道的角动量。

5.6 轨道手征性

轨道角动量的手征性是质心参照系理论的重要特征。在一个作用核附近，核质量产生梯度场，核自旋产生旋度场，核与粒子的相对运动产生散度场。核自旋不仅提供粒子绕核运动的离心力，还提供了一个空间参考方向，这是导致轨道手征性的根本原因。手征性允许轨道角动量$\tilde{M}$（或旋量的分量n_3）取负整数。因此，粒子在同一个核作用场可以逆时针或顺时针转动。考虑了核自旋以后，不再需要假设质点$m\boldsymbol{r}$具有自旋性质。因为核自旋是通过旋度场对粒子产生作用的，所以也不需要重复计算轨道角动量与核自旋角动量的耦合。

量子力学假设电子具有内秉自旋，电子的总角动量是轨道角动量与自旋角动量的矢量之和。电子的状态由四个量子数(n, l, m_z, m_s)描述，其中n代表轨道半径，l代表轨道角动量，$m_s = \pm 1/2$代表自旋角动量，m_z是总角动量在Z方向的投影。质心系理论以核自旋取代电子自旋，描述电子的状态只需三个量子数(n_1, n_2, n_3)。它们是旋量的三个分量，分别代表轨道的转动半径、振动次数和角动量。(n_1, n_2, n_3)是独立的，正好等于轨道运动的三个自由度，其中n_3被扩展到负整数，以反映角动量的手征性。

质心系的轨道能级有三类简并。第一类是n_3的反对称性导致的手征性简并，如$\tilde{E}(2,1,1) = \tilde{E}(2,1,-1) = 6/2$。第二类是交换$n_2$和$n_3$导致的交换对称简并，如$\tilde{E}(6,1,5) = \tilde{E}(6,5,1) = 62/2$。最后一类是不同半径数$n_1$的非对称简并，如$\tilde{E}(6,1,5) = \tilde{E}(7,2,3) = 62/2$。手征性简并概率最大，交换对称简并概率次之，非对称简并的概率最小。在外场作用下，手征性简并的能级最容易发生分裂，从而导致光谱的精细结构。

不同质量的粒子在同一个核作用场中具有相似的能级结构，但因能量标度不同，它们的实际能级并不重合。只有相同质量的粒子才有可能同时占据手征性简并能级的两个轨道。电子是同质量粒子，所以原子中的电子可以同时出现在右手和左手轨道上。自然界尚未发现一对反向旋转的行星，是因为同一个恒星场中出现相同质量和能量的行星的概率微乎其微。

6 结　论

基于质心参照系的粒子动力学理论从完备的流场力出发建立动力学方程（状态方程）。方程包含吸引和排斥两种相互作用：吸引力来自梯度场，排斥力来自粒子运动与旋度场的耦合。粒子的运动遵循能量定理、旋量定理和角动量定理。动力平衡系统的能量、旋量和角动量守恒，它们的变化分别满足能量、旋量和角动量的量子化条件。以作用核的自旋方向为参考，粒子的轨道角动量具有手征性，无需电子自旋假设。

通过求解动力平衡方程，证明椭圆轨道是粒子平衡状态的特解。根据粒子轨道模型，多粒子系统的空间轨道是花瓣形的，包含圆周转动、径向振动和轴向振动三个自由度。粒子系统的状态由旋量表征，轨道能量由旋量的平方确定。运用粒子动力学理论研究原子的光谱和结构是一项急迫而富有挑战的任务。质心参照系理论的完备性和自洽性表明，流场力是粒子相互作用的统一形式，测量原理是融合相对论和量子论基础的第一性原则，粒子动力学定理是宏观和微观世界普适的物理规律。

参考文献

[1] Jin S N, Ma Y L 2002 Theoretical Mechanics (Beijing: Higher Education Press)(in Chinese). [金尚年,马永利 2002 理论力学(北京: 高等教育出版社)]

[2] Einstein A (translated by Hao L) 2014 The meaning of relativity (Beijing: Peking University Press). [爱因斯坦 A 著(李灏译) 2014 相对论的意义(北京: 北京大学出版社)]

[3] Qian B C 2006 Quantum Mechanics (Beijing: Higher Education Press). [钱伯初 2006 量子力学(北京: 高等教育出版社)]

[4] Liang Z C 2020 Outline of real physics. *Glob J Sci Front Res* **20** (3A) 9 https://doi.org/10.34257/gjsfravol20is3pg9

[5] Liang Z C 2019 Modeling of real particles. *J Phys (Conf Ser)* **1391** 012026 https://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012026

[6] Liang Z C 2019 The origin of gravitation and electromagnetism. *Theor Phys* **4** 85 https://doi.org /10.22606/tp.2019.42004

[7] Liang Z C 2019 Motion, energy, and state of body particle system. *Theor Phys* **4** 66 https://doi.org/10.22606/tp.2019.42003

[8] Liang Z C 2019 Cluster ensemble statistics of body particle system. *New Hori Math Phys* **3** 53 https://doi.org/10.22606/nhmp.2019.32002

[9] Liang Z C 2021 Dark matter and real-particle field theory. *Glob J Sci Front Res* **21**(6A) 27 https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26655.28327/1

[10] Liang Z C 2024 A fluid field theory based on barycenter reference systems. https://doi.org /10.13140/RG.2.2.19554.34249

[11] Kuhn T S (translated by Zhang B T) 2012 The Structure of Scientific Revolutions (Beijing: Peking University Press) [库恩 T 著(张卜天译) 2012 科学革命的结构(北京: 北京大学出版社)]

[12] Liang Z C 2015 Physical Principles of Finite Particle System (Wuhan: Scientific Research Publishing) . [梁忠诚 2015 有限粒子系统的物理基础(武汉:科研出版社)]

[13] Marvin Zanke，Rotating Charged Sphere - Problem with Suggested Solution，www.Physics-and-Stuff.com

[14] Liang Z C, Chen N N 2023 The distortion and quantization of the earth's orbit. *J Phys Chem Biophys* **13** 361 doi:10.35248/2161-0398.23.13.361

[15] Liang Z C, Xie L H 2023 Wave or particle? Quantum behavior of solar system. *Glob J Sci Front Res* **23** (7A) 9 https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2891785/v1

[16] Zhu S L, 1979 Atomic Physics (Beijing: Higher Education Press) [褚圣麟1979 原子物理学(北京: 高等教育出版社)]

A physical theory based on barycenter reference frames

II. Principles of particle dynamics

Liang Zhong-Cheng[1)†]

1 (*College of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China*)

Abstract

This paper extends the theory of elastic particle flow field based on the barycenter reference frame and constructs the theoretical foundation of new particle dynamics. According to the particle flow field theory, the complete interaction contains gradient, curl and divergence forces. The principle of action proposed in this paper affirms that the motion of a particle is driven by a force field, and the unified form of the force includes attraction and repulsion. In the force field, the motion of the particles follows the modified energy theorem and angular momentum theorem, as well as the newly discovered curlity theorem. Energy, curlity and angular momentum are conserved in dynamically balanced systems, and their variations obey universal quantization rules. In a kernel field, the motion of particles follows the generalized Newton's law ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, equation of state), and elliptical orbit is the special solution of the equation of steady states ($\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$). The eigenstate orbitals of a multiparticle system are petal-shaped, and the orbital energy spectrum (energy eigenvalues) is determined by the square of the curlity. A mathematical model of particle orbit is proposed, the structure of electron shells and the spectrum of the hydrogen atom are explained, and the relationship between the nuclear spin and the chirality of the electron orbitals is also elucidated. The completeness and self-consistency of the theory show that the flow field force is a unified form of particle interaction, that the principle of measurement is a first principle integrating the foundations of relativity and quantum theory, and that the theorem of particle dynamics is a universal physical law for the macroscopic and microscopic worlds.

Keywords: particle dynamics, elastic particles, barycenter frame of reference, force of flow field, principle of measurement, theorems of dynamics, quantization of orbitals

PACS: 95.10.Jk, 45.50.-j, 45.50.Dd, 03.65.Ta

---

† Corresponding author. E-mail: zcliang@njupt.edu.cn